980. 單位ヲ有スル vector 束ニ就テ, III

吉田耕作, 深宮政範(阪大)

前談話 912, 916 ノ結果ヲ"代數的"ニ擴張スルト algebras ノ基本定理 "algebra E ヲソノ radical R デ剩餘類ヲトッタトキ E/R ハ semi-simple ニナリ, 從ッテ E/R ハ total matric algebras 直和トシテ表現デキル" ニ parallel ナ形ニ vector 束ノ表現定理ガ得ラレル樣デアルカラ之ヲ述ベラミタイ. (種々 discuss シ且ッ多クノ hints ヲ與ヘラレタ中山氏ニ感謝シタイ)

<u>Vector 束ノ定義</u>　實數 ($\alpha, \beta, \cdots\cdots$ デ表ハス) ヲ係數トスル加法群 (ソノ要素ヲ $x, y, z, \cdots\cdots$ デ表ハス) ニ於テ次ノ條件ヲ滿足スル semi-order $\geqq$ ガ定義サレラルトキ E ヲ vector 束ト呼ブ:

(1)　$f \geqq g$ ト $f-g \geqq 0$ トハ同等

(2)　$f \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha f \geqq 0$

(3) $f \geq 0,\ -f \geqq 0$ ナラ $f=0$

(4) $f \geqq 0,\quad g \geqq 0$ ナラ $f+g \geqq 0$

(5) $\geqq$ ノ意味デ E ハ束ヲ作ル. 即チ全テノ f ニ對シ join $f \vee 0 = f^+$ ガ定ル。[1]

尚 E ハ單位 $I > 0$ ヲ有スルトスル:

(6) 全テノ f ニ對シ $\alpha I \geqq f \geqq -\alpha f$ ナル如キ α 定ル。

前談話 912, 916 ノ結果ニヨレバ E ガ Archimedes ノ公理

$$\text{(A)}\quad \underset{n\to\infty}{\text{order limit}}\ \frac{1}{n} f = 0 \quad \text{for all } f \geqq 0$$

ヲ満足スルナラバ E ハ E ノ maximal ideal M ノ全体 $\mathfrak{M}$ ノ上デ定義サレタ函數ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現ガキル。(然モ I ハ $\mathfrak{M}$ ノ上デ恒等的ニ 1 ナル函數トシテ)。

以下ニハ (A) ヲ <u>假定セズ</u>ニ議論スル。

<u>ideal</u> E ノ linear subspace N ガ與ヘラレタルトキ linear-homomorphism $E \longrightarrow E/N$ ガ lattice-homomorphism 即チ $a \equiv a',\ b \equiv b'$ (N) ナラ $a \Diamond b \equiv b \Diamond b'$ ナルタメノ必充條件, N ガ ideal ナルコト: $x \in N$ 且ツ $|y| \leqq |x|$ ナラ $y \in N$. デアル。$0 \neq N,\ E \neq N$ ナル如キ ideal ヲ non-

---

(1) $f \wedge 0 = f^-,\quad f = f^+ + f^-,\ |f| = f^+ - f^- = f \vee (-f)$ 等既知。

trivial，又自分自身及ビE以外ノidealニ含マレナイ様ナnon-trivial idealヲmaximalデアルト云フ。non-trivial idealsノtransfinitナincreasing sequence.

$$N_1 < N_2 < \cdots\cdots < N_\eta < \cdots\cdots,\ \eta < \omega$$

ガ與ヘラレタトキ $x \equiv y\,(N_\omega)$ ヲ少クトモーツノ $\eta < \omega$ ニ對シテ $x \equiv y\,(N_\eta)$ ニヨツテ定義スルト N_ω ハ上カラidealニナル。N_η 全テnon-trivialダカラ $I \not\equiv 0\,(N_\eta)$, $\eta < \omega$，ヨツテ $I \not\equiv 0\,(N_\omega)$.即チ N_ω モ亦non-trivial. 故ニEハmaximal idealヲ有スル。

<u>Radical</u>　或ル $\alpha > 0$ ニ對シテ $\alpha I > n|a|$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナル如キaヲnilpotentデアルト呼ブ．EノmaximalideaI Mノ全体 $\mathfrak{M}$ ノintersection ideal $R = \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} M$ ヲradicalト呼ブ。

<u>定理</u>　(i)　E/R ハ $\{M/R\}_{M \in \mathfrak{M}}$ ノ上デ定義サレタ実函数ニヨツテlattice-isomorphicニ表現サレル。(1) 然モ I ハ恒等的ニ1ナル函数ニヨツテ　(ii) RハnilpotentナT要素ノ全体ニ一致スル。

---

(1)　之レ等函数ノ全体ハ，適當ニtopology入レタ $\{M/R\}$ ノ上ノ連續函數ノ全体ノ中デ一様収斂ノ意味デdenseニナル（前談話）カラalgebrasノ場合ノ"進和表現"相應スルト考ヘテヨイ。

<u>證明</u> (i) E/M, $M \in \mathfrak{M}$ ガ實數ノ作ル vector 束ト lattice isomorphic ($I \longleftrightarrow 1$ ナル如ク) ナコトサヘ云ヘバヨイ。所ガ M ノ maximality カラ E/M ハ simple 即チ ideal ヲ含マナイ。

simple ナ vector 束 E' ハ nilpotent ナ $a \neq 0$ ヲ含マナイ。若シ a ガ nilpotent ナラ $(|x| \leq \eta |a|)_{\infty > \eta}$ ナル如キ x ノ全体ハ non-trivial ideal ニナルカラ、從ッテ simple ナ vector 束 E/M ハ (A) ヲ満足スルカラ 前證明ノ結果ニヨリ實數全体ト思ッテヨイ。

(ii) nilpotent ナ a ハ 一ニ示シタ如ク non-trivial ideal ニ含マレルカラ $\in M$, $M \in \mathfrak{M}$. 從ッテ a nilpotent ナラ $\in R$.

逆ニ $a > 0$ ガ nilpotent デナイトスルト $a \bar{\in} R$ 即チ a ヲ含マヌ $M \in \mathfrak{M}$ ガ存在スルコトヲ示ストヨイ。以下其證明。

假定ニヨリ $na \not\leq I$ ナル如キ正整數 n ガ存在スル。$na \geqq I$ ナラ勿論 $na \bar{\in} M$, $M \in \mathfrak{M}$ ダカラ $na \not\geq I$ ト假定スル。然ラバ $p = I - (na) \wedge I > 0$. コノトキドンナ正整數 m ニ對シテモ 決シテ $mp \geqq I$ トハナラナイ。

若シ然ラズトスレバ $\dfrac{I}{m} \leqq I - (na) \wedge I$

從ッテ $na \wedge I = na \wedge \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) I$, 之レヨリ

$$\left\{na - \left(1 - \frac{1}{m}\right) I\right\} \wedge \frac{1}{m} I = \left\{na - \left(1 - \frac{1}{m}\right) I\right\} \wedge 0 \leqq 0$$

從テ $\left[\left\{na - \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) I\right\} \wedge \dfrac{1}{m} I\right] \vee 0 = \left\{na - \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) I\right\}^{+} \wedge \dfrac{1}{m} I = 0$

ヲ得ル。之ヨリ $\{na \dot{-} (1-\frac{1}{m})I\}^+ = 0$

即チ $na \leqq (1-\frac{1}{m})I$ ヲ得テ(1) $na \not\leqq I$ ニ矛盾スル。

以上

---

(1) 一般ニ $b \geqq 0$, $b \wedge I = 0$ ナラ $b = 0$. 何者, $b > 0$ トスルト $b < \alpha I$ ヨリ $0 < b = b \wedge \alpha I$. 之レハ $\alpha < 1$ ナラ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾. 又 $\alpha \geqq 1$ ナラ $0 = \frac{0}{\alpha} < \frac{b}{\alpha} \wedge I \leqq b \wedge I$ デ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾スル。